



***Modelowanie Metodą Elementów  
Dyskretnych - wartość dodana do analiz  
naukowych***

Michał Nitka



## Założenia

- Fundamentalnym założeniem metody jest fakt, że materiał składa się z pojedynczych elementów (np. ziarna piasku)
- Pierwszy raz została opisana i zastosowana w inżynierii przez Cundall and Strack (1978)

P.A. Cundall and O.D.L Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29 (1), 1978

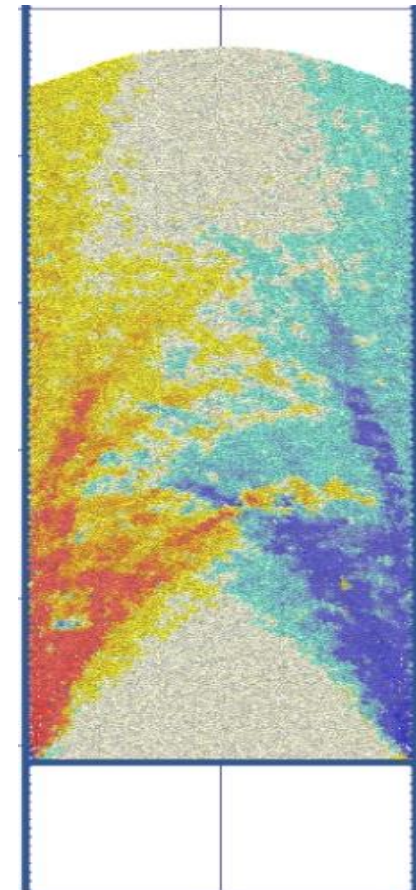
- Wyróżniamy 4 podgrupy:
  - Metoda Monte Carlo
  - **Molecular dynamics (MD)**
  - EDM (Event Driven)
  - CD (Contact Dynamics)



## Zastosowanie:

### Typowe zastosowanie metody:

- przemysł chemiczny,
- przemysł żywnościowy,
- przemysł naftowy,
- kopalnie,
- farmacja,
- metalurgia proszków,
- **Inżynieria lądowa,**
- itd.





## Dlaczego DEM?

- Jesteśmy w stanie odtworzyć prawdziwe zachowanie materiału granulowanego;
- Nadaje się do obliczeń dużych odkształceń lub/i separacji;
- Zachowuje historię obciążenia;
- Umożliwia zaobserwowania zjawisk na poziomie mikro
- Nie potrzebujemy skomplikowanych praw konstytutywnych





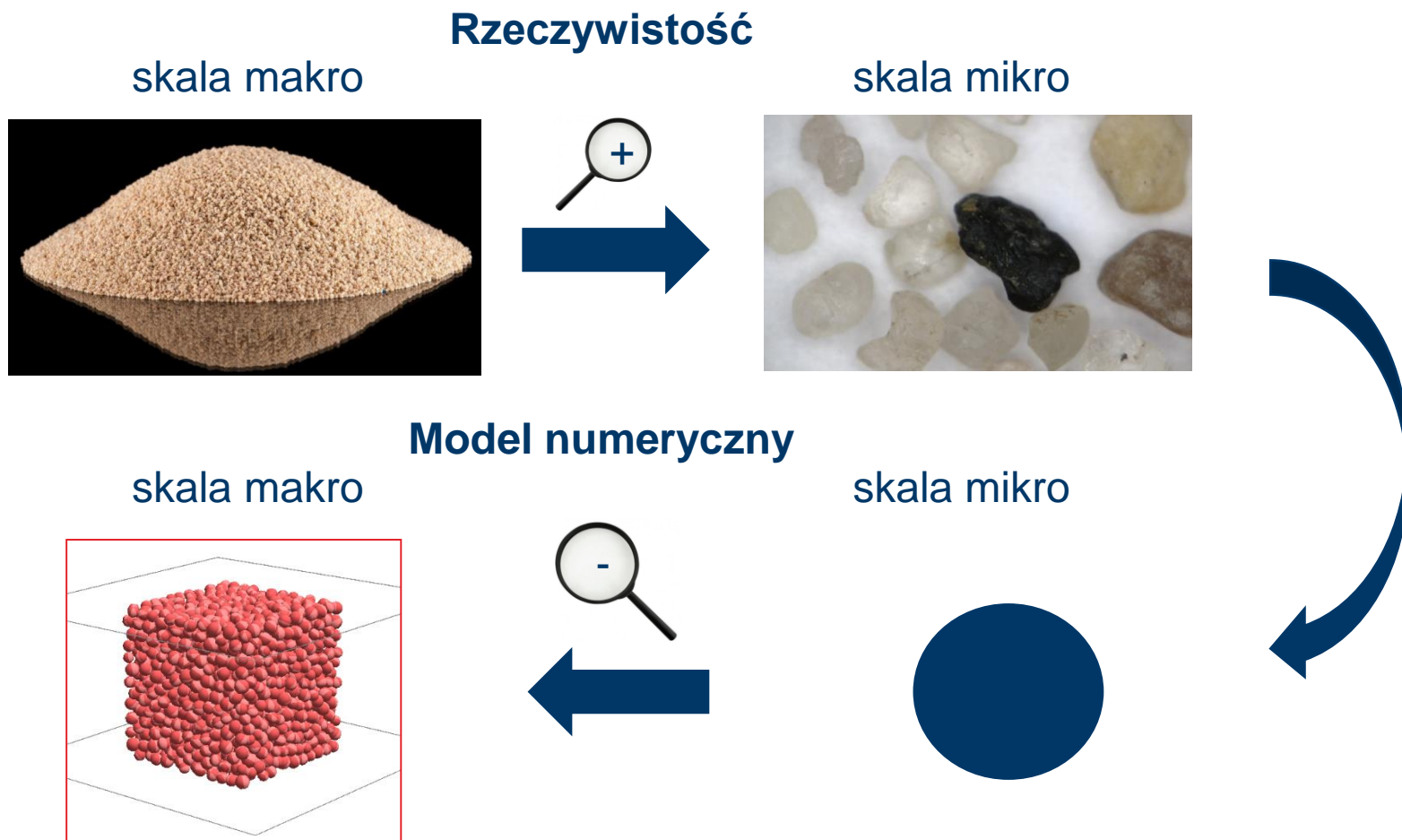
## Dlaczego nie tylko DEM?

- Słabo nadaje się do materiałów jednolitych (np. stali)
- Długi czas obliczeń (dni/tygodnie)
- Możliwość (na razie) obliczeń elementów w skali laboratoryjnej



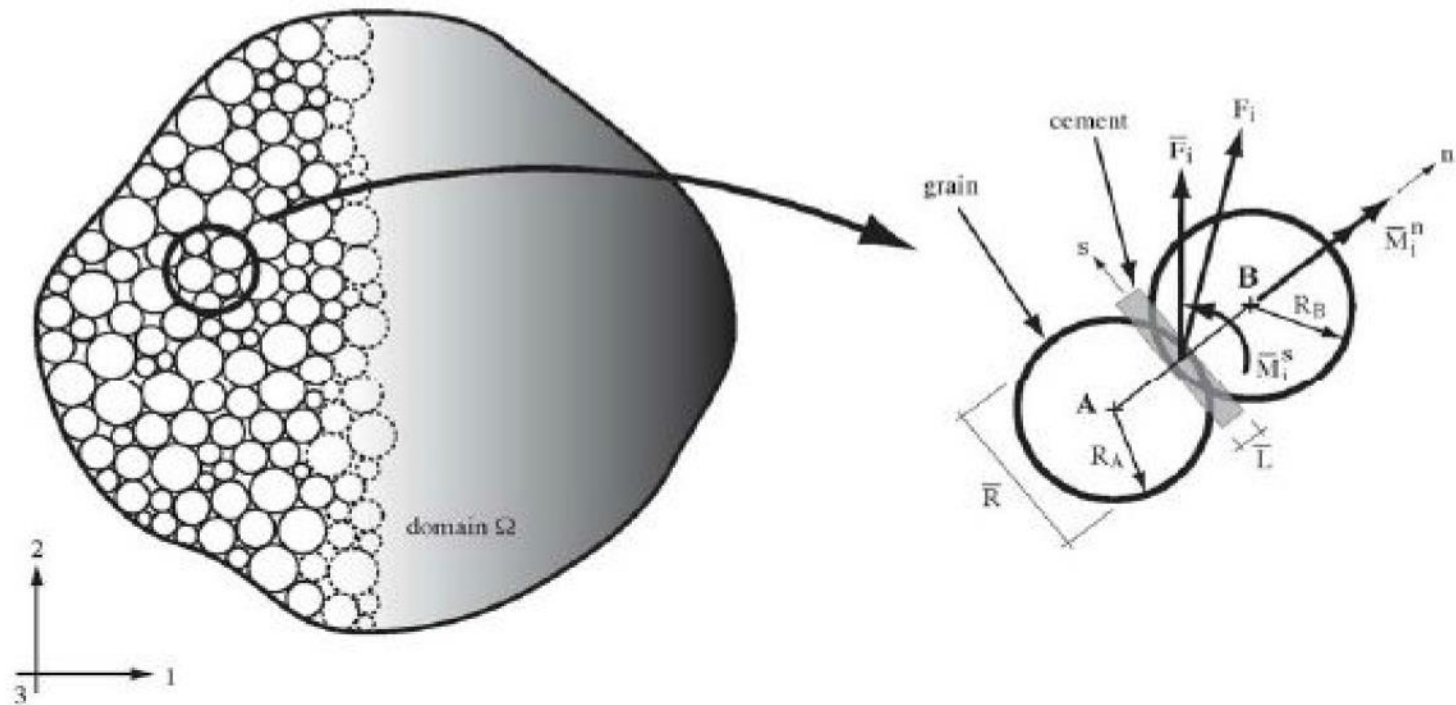


## Model geometryczny:





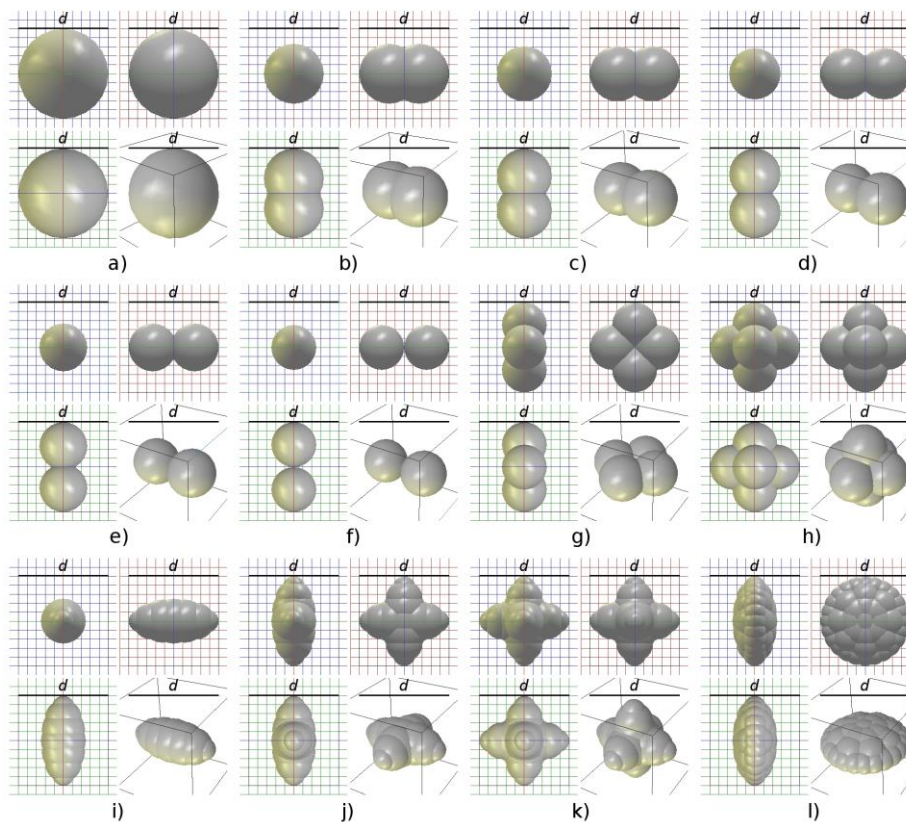
Model geometryczny:





## Model geometryczny:

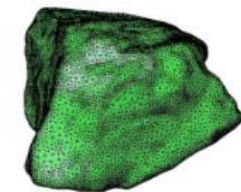
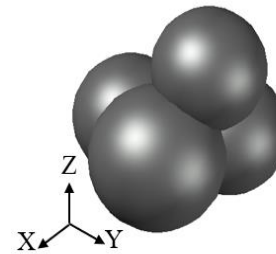
### Różne, bardziej rzeczywiste kształty



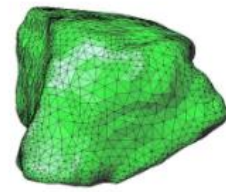




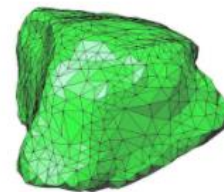
## Model geometryczny:



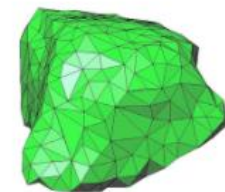
15979 n, 31954 t



3474 n, 6944 t



917 n, 1836 t



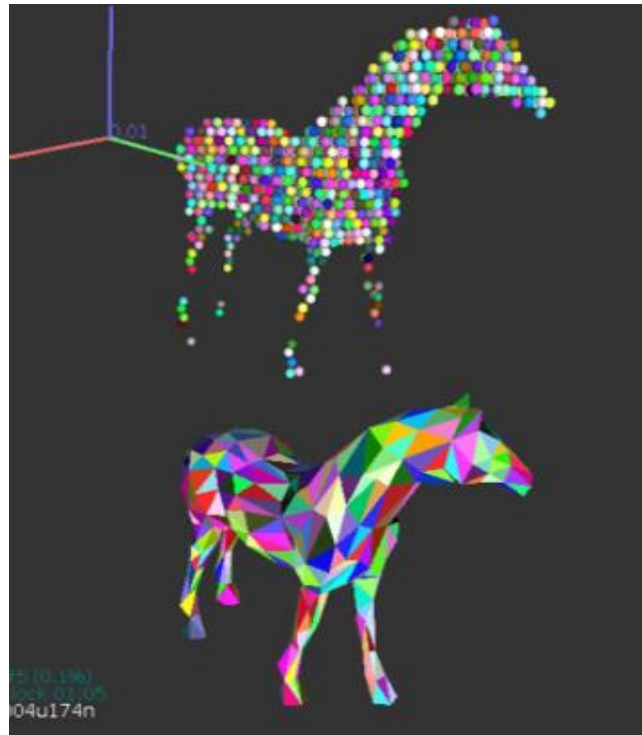
298 n, 593 t

Latham, J.P. Munjiza, A. Garcia, X. Xiang, J. Guises, R. 2008. Three-dimensional particle shape acquisition and use of shape library for DEM and FEM/DEM simulation. *Minerals Engineering* 21 (11), 2008.



## Model geometryczny: YADE

- Możemy też dodawać ściany, pudełka, stl i wiele innych kształtów

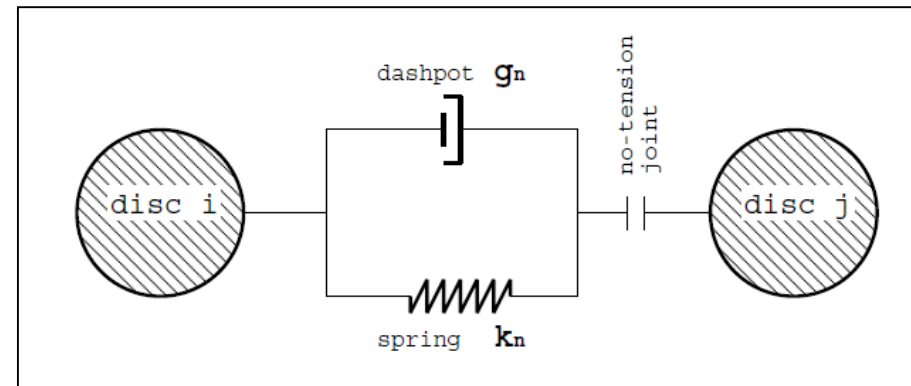
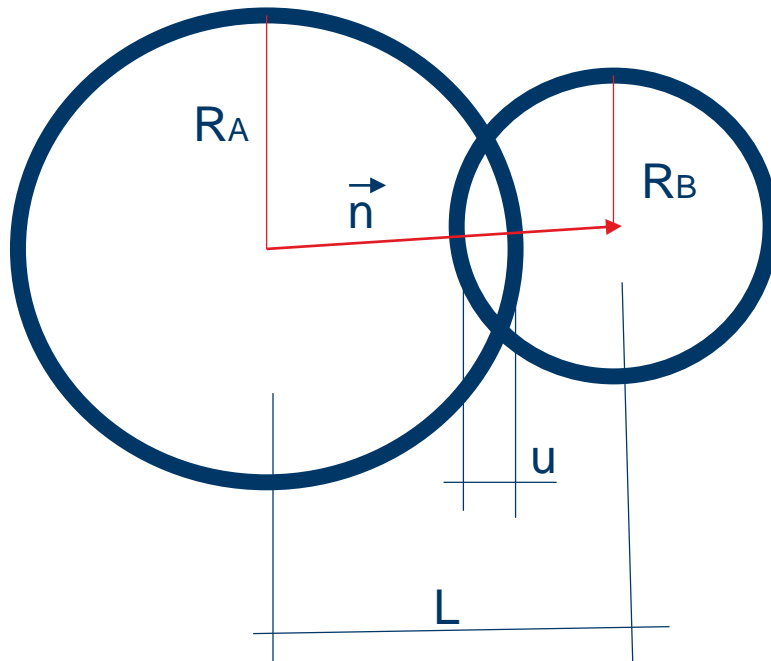


← kulki

← stl (np. CAD)



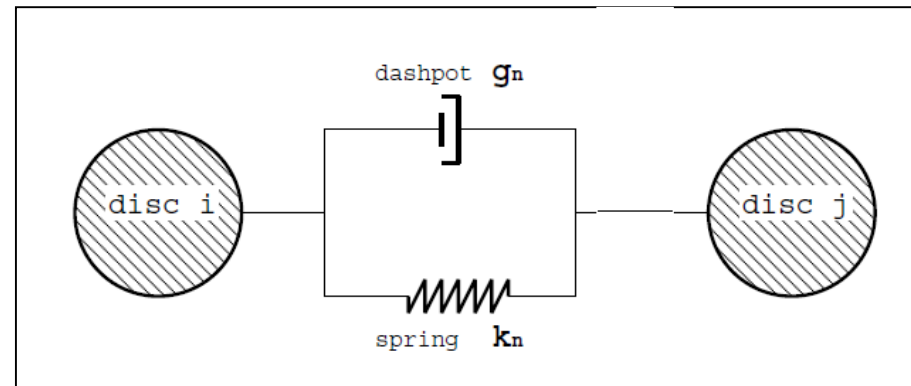
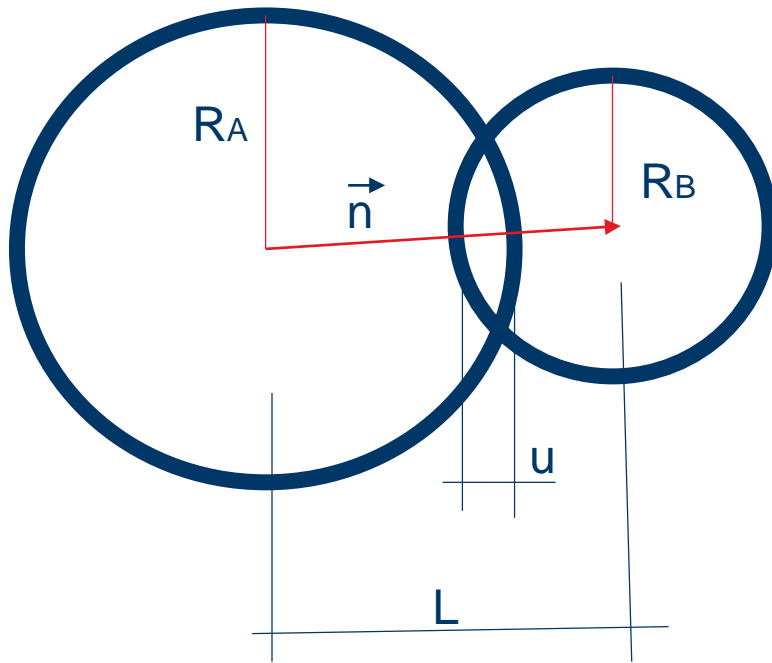
## Model konstytutywny: siła normalna



$$\vec{F}_n = k_n u \vec{n}; \quad u = L - (R_A + R_B); \quad k_n = f(E, R);$$



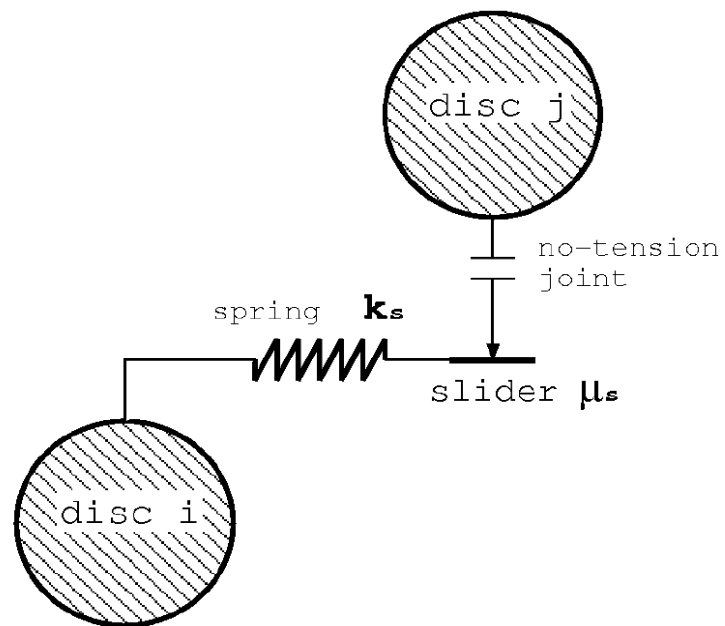
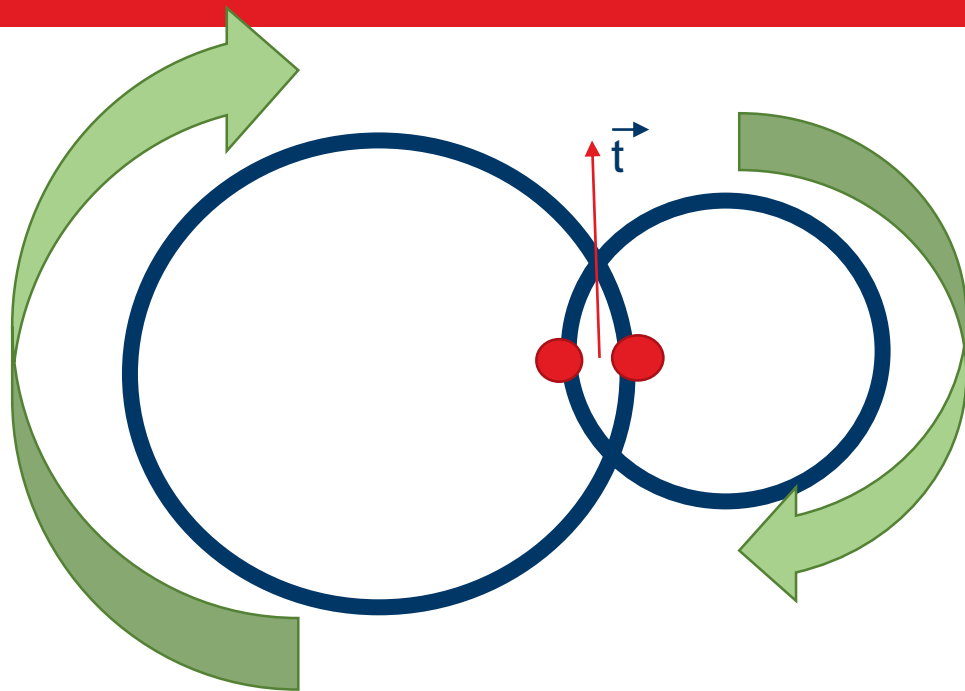
## Model konstytutywny: siła normalna



$$\vec{F}_n = k_n u \vec{n}; \quad u = L - (R_A + R_B); \quad k_n = f(E, R);$$

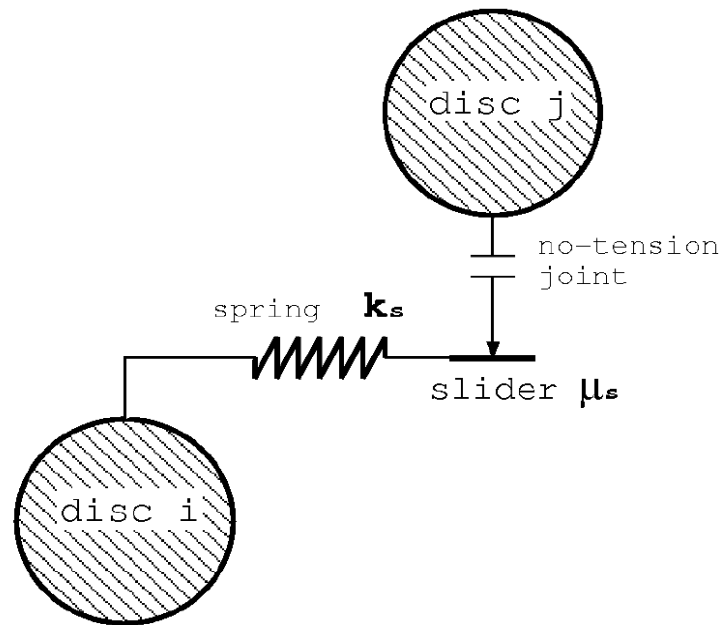
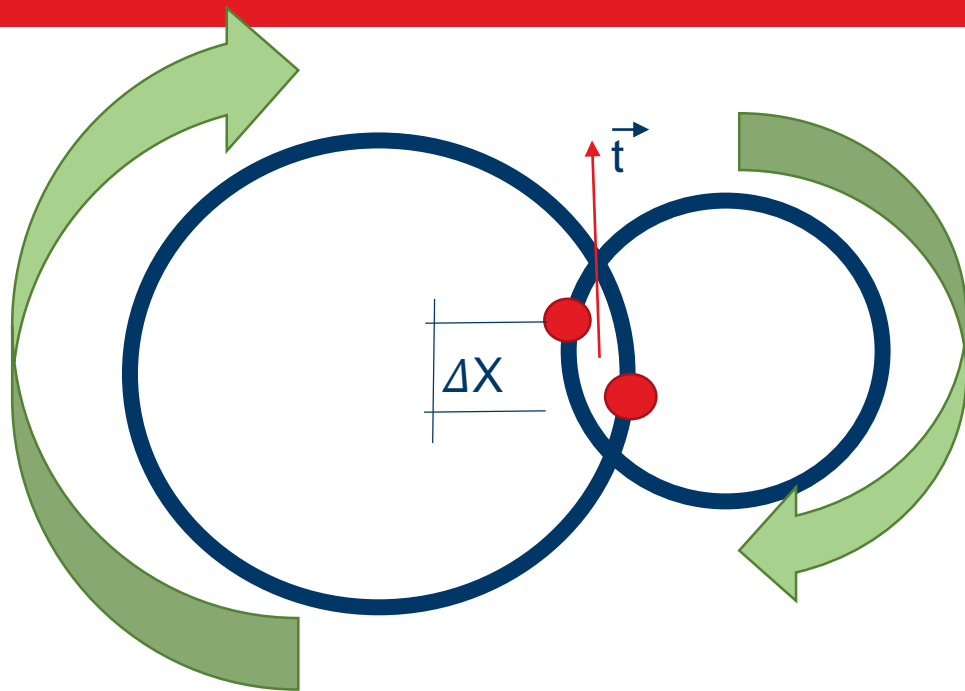


## Model konstytutywny: siła styczna





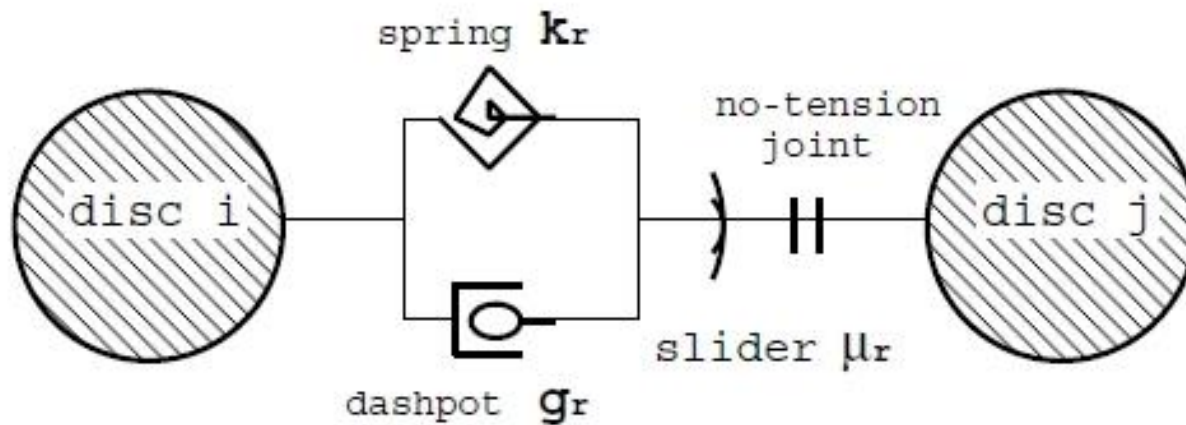
## Model konstytutywny: siła styczna



$$\Delta \vec{F}_s = k_s \Delta \vec{x}; \quad k_s = f(v, E, R);$$



## Model konstytutywny: ograniczenie toczenia



$$\Delta M = K_r \Delta \vec{\omega}$$



## Algorytm

- Metoda jawna (bardzo ważny dobór kroku czasowego)
- Po obliczeniu sił działających na pojedynczy obiekt (suma wszystkich sił działających na niego, również tych zadanych np. grawitacja) trzeba obliczyć siłę wypadkową
- Używając II zasady Newtona obliczamy przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$







## Algorytm

- Po wyliczeniu przyspieszenia, całkujemy aby dostać prędkości;
- Po otrzymaniu prędkości, całkujemy, aby uzyskać przemieszczenie;
- Po otrzymaniu przemieszczenia dostajemy nową pozycję naszego elementu!

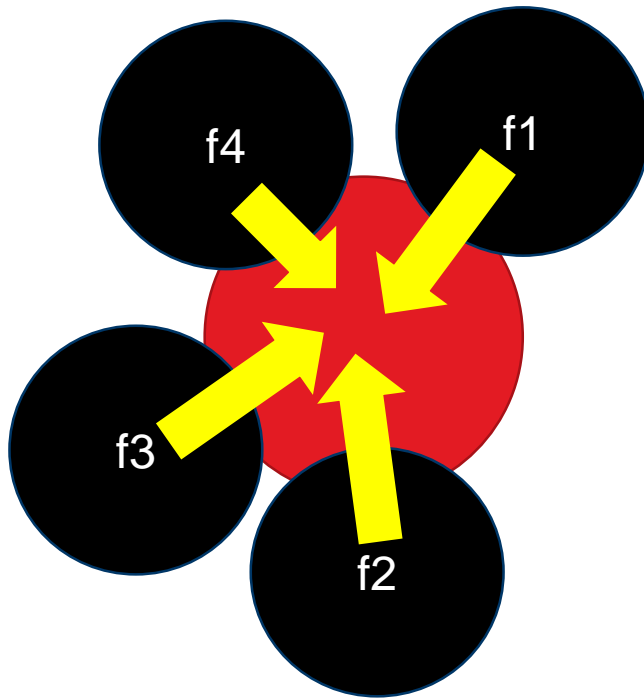
$$d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$$d\vec{x} = \vec{v} dt$$

$$\vec{x} = \vec{x}_p + d\vec{x}$$



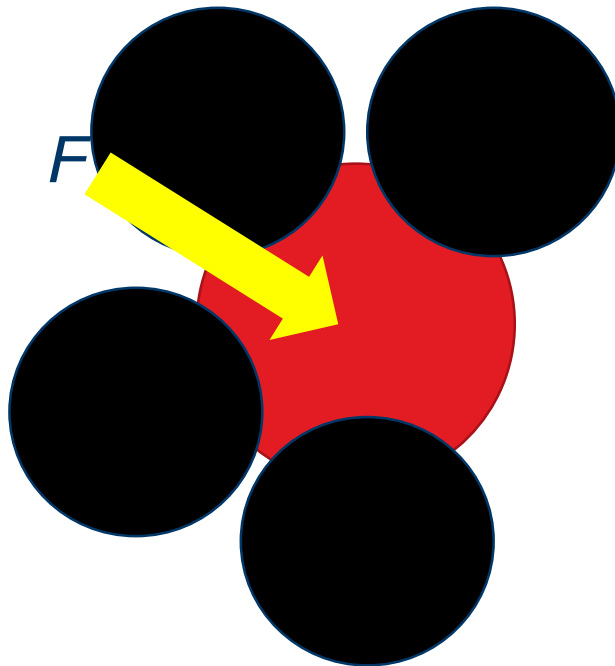
## Algorytm



- Sprawdzamy geometryczne nachodzenie się elementów (interesuje nas czerwona kula).
- Wyliczamy „nachodzenie się” (overlap) i przemieszczenie styczne
- Wyliczamy siły (wszystkie: normalne, styczne i zewnętrzne)



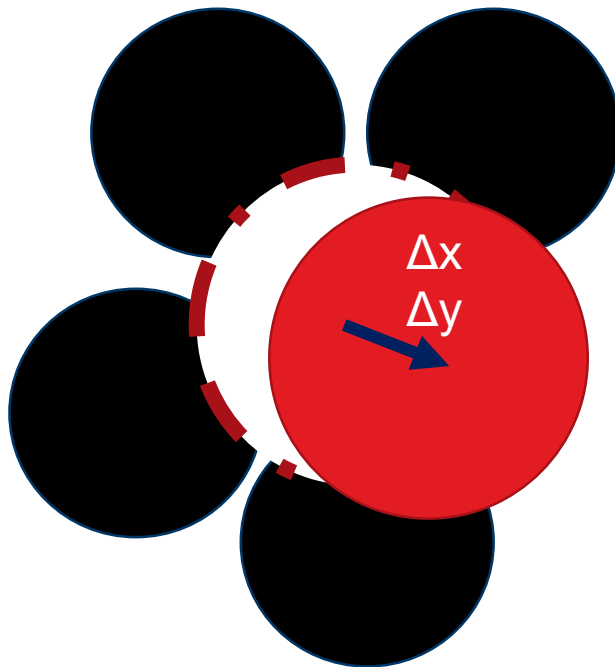
## Algorytm



- Wyliczamy siłę wypadkową działającą na nasz element „ $F$ ”
- Wyliczamy przyspieszenie, prędkość i przemieszczenie
- W kolejnym kroku czasowym uaktualniamy pozycję kulki



## Algorytm



- Wyliczamy siłę wypadkową działającą na nasz element „ $F$ ”
- Wyliczamy przyspieszenie, prędkość i przemieszczenie
- W kolejnym kroku czasowym uaktualniamy pozycję kulki



## Parametry

### Parametry potrzebne do modelu (fizyczne):

- Kształt i wielkość elementu  
(zazwyczaj jednak uproszczamy do kuli)
- Gęstość materiału (masa)
- Sztywność połączenia (moduł Younga kontaktu)
- Stosunek sztywności normalnej do stycznej (współczynnik Piosson'a kontaktu)
- Kąt tarcia między elementami
- Kohezja (?)





## Parametry

### Parametry potrzebne do modelu (fizyczne):

- Kształt i wielkość elementu (zazwyczaj jednak uproszczamy do kuli)
- Gęstość materiału
- Sztywność połączenia (moduł Younga kontaktu)
- Stosunek sztywności normalnej do stycznej (współczynnik Piosson'a kontaktu)
- Kąt tarcia między elementami
- Kohezja (?)



### Parametry potrzebne do modelu (numeryczne):

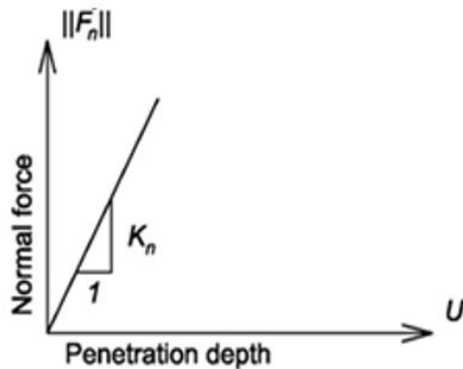
- Tłumienie (niezbędne w długich obliczeniach, nie wpływa na wyniki przy quasi-statycznych obliczeniach)
- Krok czasowy (nie ma wpływu na wyniki jeśli jest wystarczająco krótki)
- .... to wszystko ;)



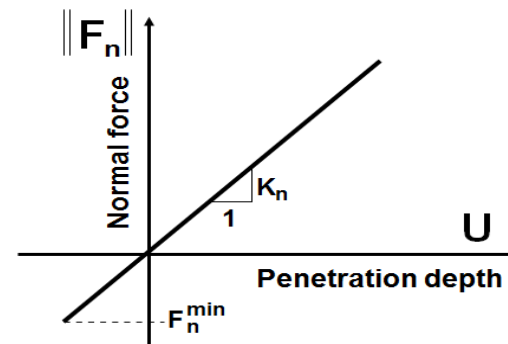
Model używany przeze mnie:

PIASEK

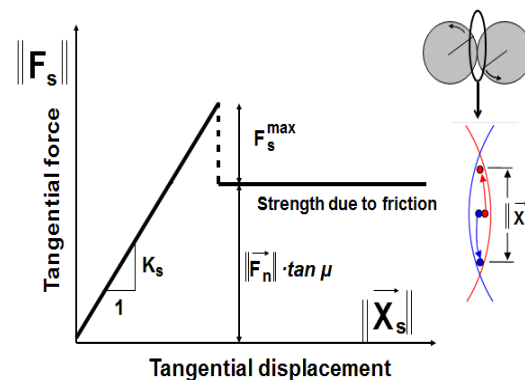
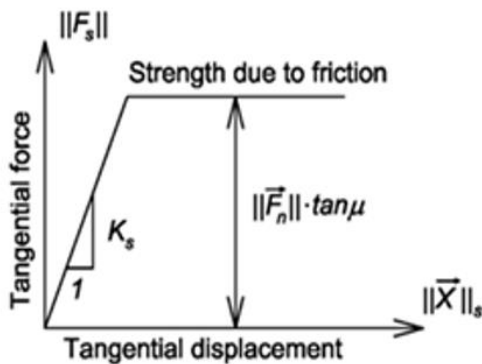
$$K_n = E_c \frac{2R_A R_B}{R_A + R_B}$$



BETON



$$K_s = \nu_c E_c \frac{2R_A R_B}{R_A + R_B}$$



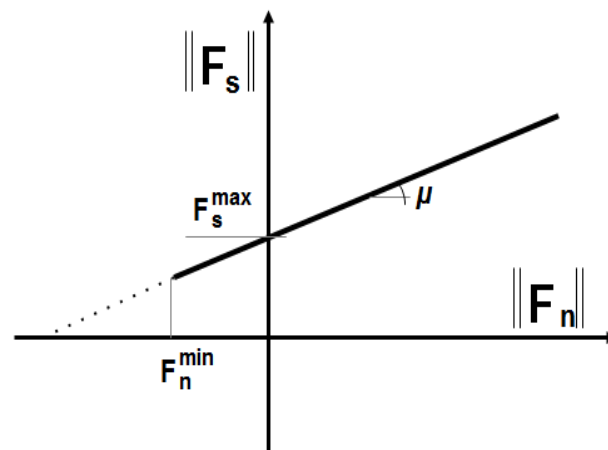


## Model używany przeze mnie:

$$\|\vec{F}_s\| - \|\vec{F}_n\| \times \tan\mu \leq 0$$

lub

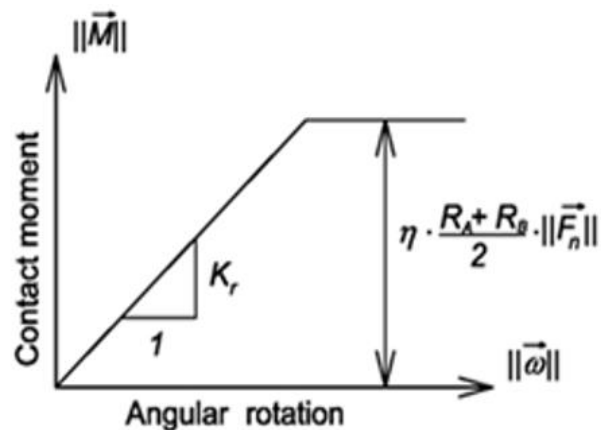
$$\|\vec{F}_s\| - F_{max}^s - \|\vec{F}_n\| \times \tan\mu \leq 0$$



Prawo momentów (ograniczenie obrotu)

$$K_r = \beta K_s R_A R_B$$

$$\|\vec{M}\| - \eta \frac{R_A + R_B}{2} \|\vec{F}_n\| \leq 0$$

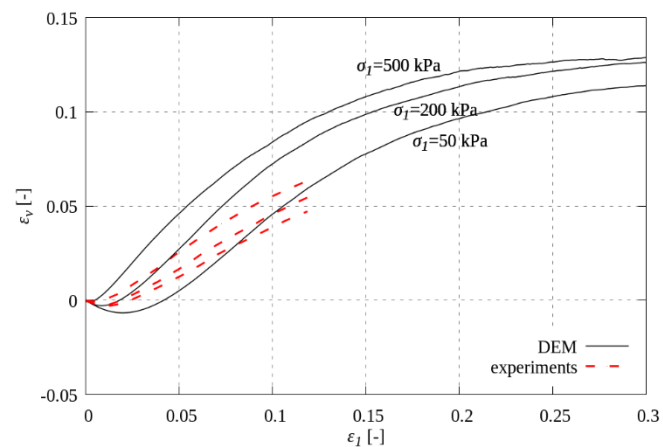
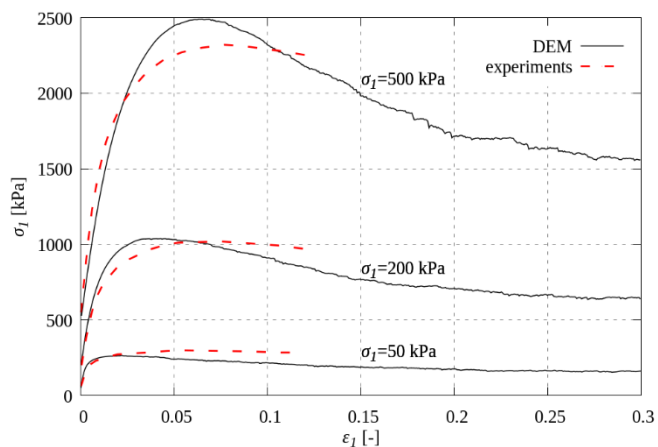
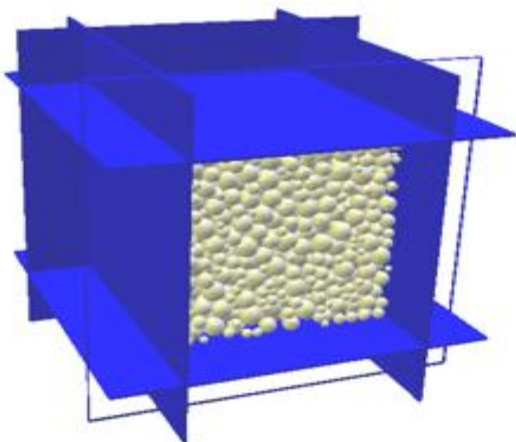






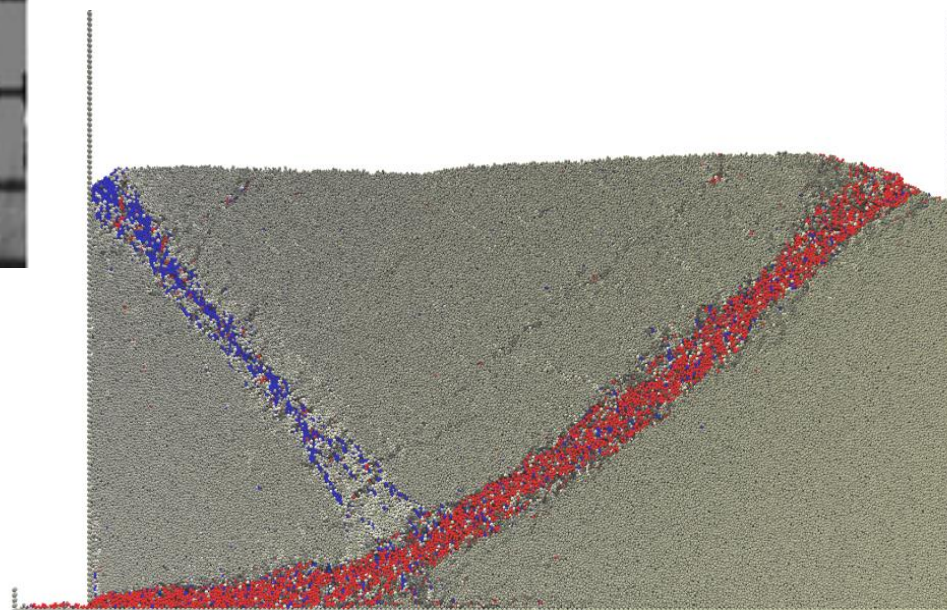
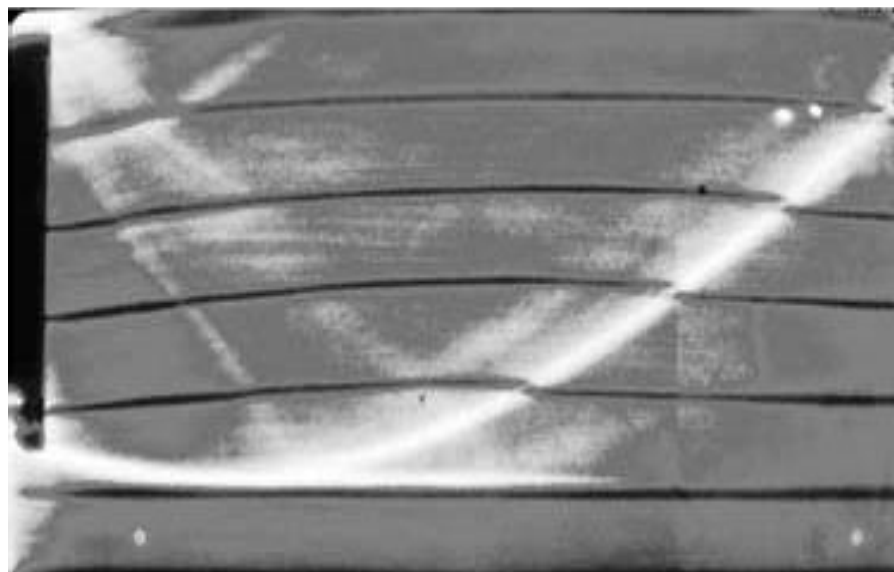
## Kalibracja piasku

Stałe materiałowe		piasek
Moduł sztywności kontaktu	$E_c$ [GPa]	0.3
Stosunek sztywności	$\nu_c$ [-]	0.3
Kąt tarcia wewnętrznego	$\mu$ [°]	18
Opór toczy elementu	$\beta$ [-]	0.7
	$\eta$ [-]	0.4



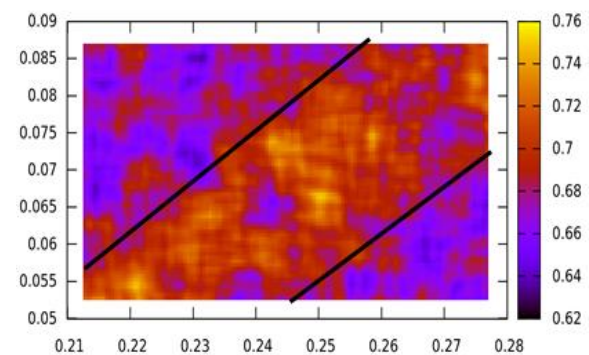
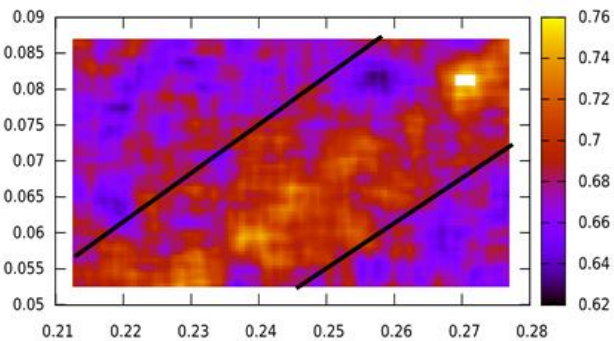
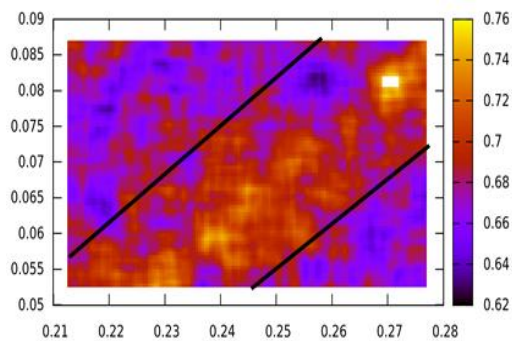
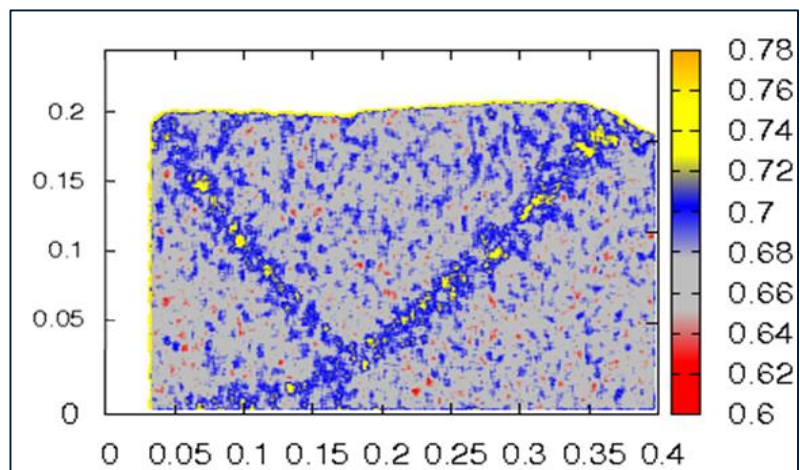


## Parcie ścianki – bierne: przykład laboratoryjny



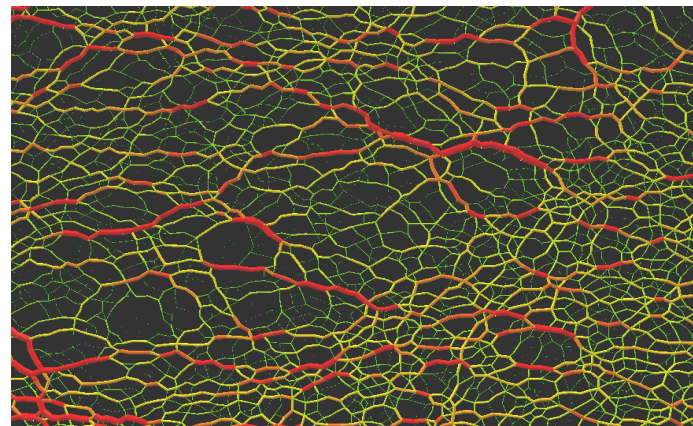
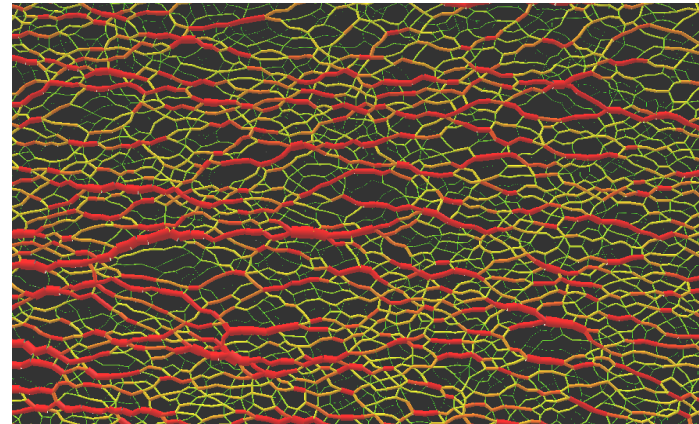
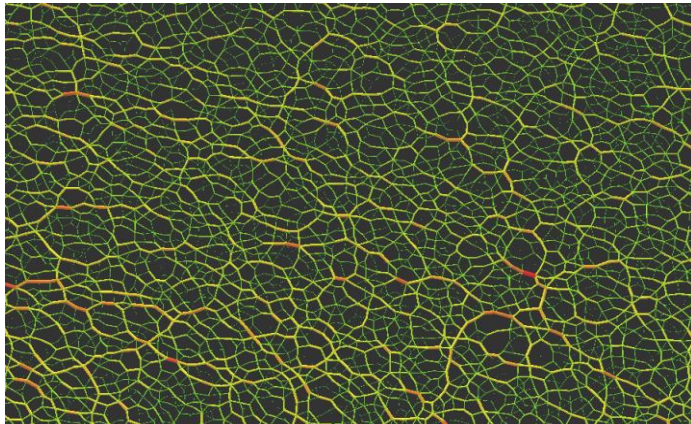


## Parcie ścianki – bierne: zmiany porowatości





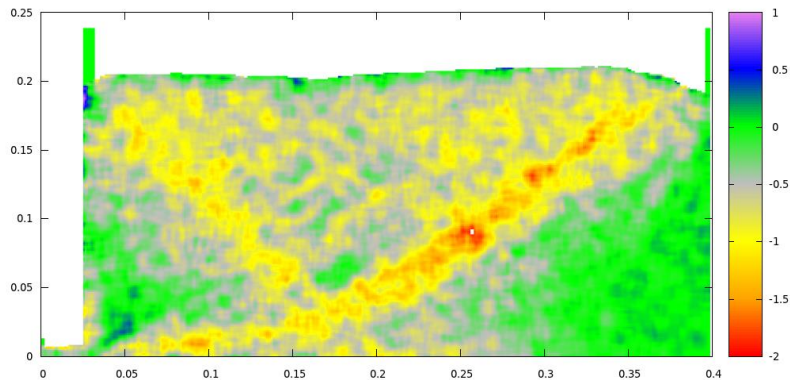
Parcie ścianki – bierne: siły normalne



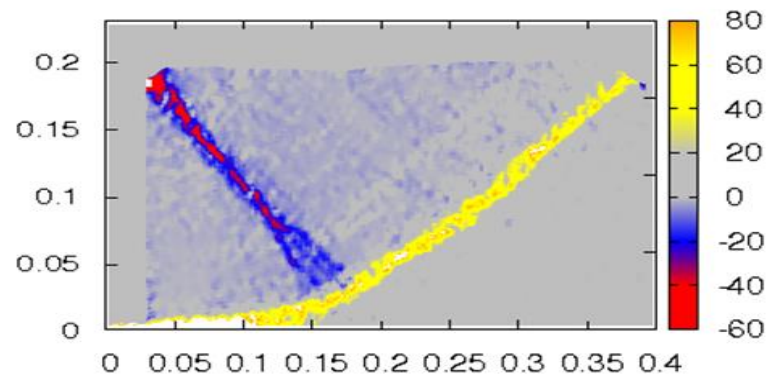


## Parcie ścianki – bierne: mapy i fluktuacje przemieszczeń

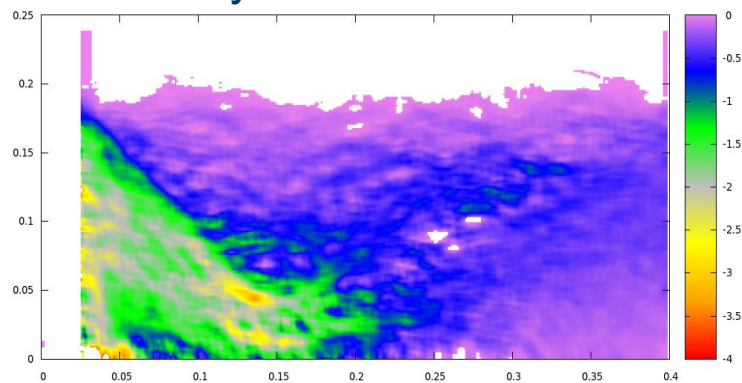
Liczba kontaktów



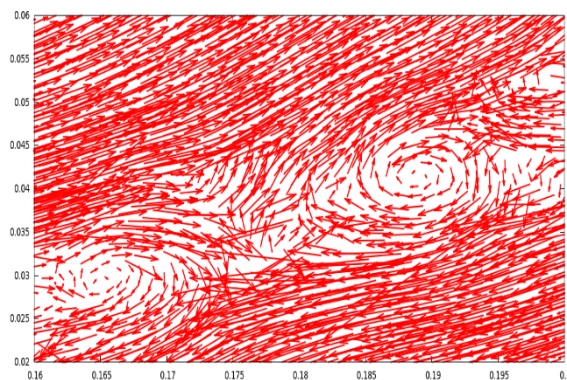
Obroty



Siły normalne

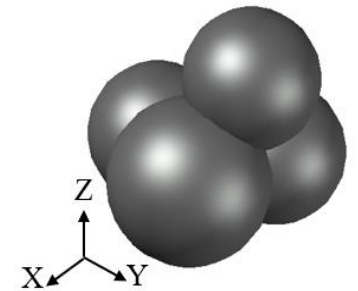
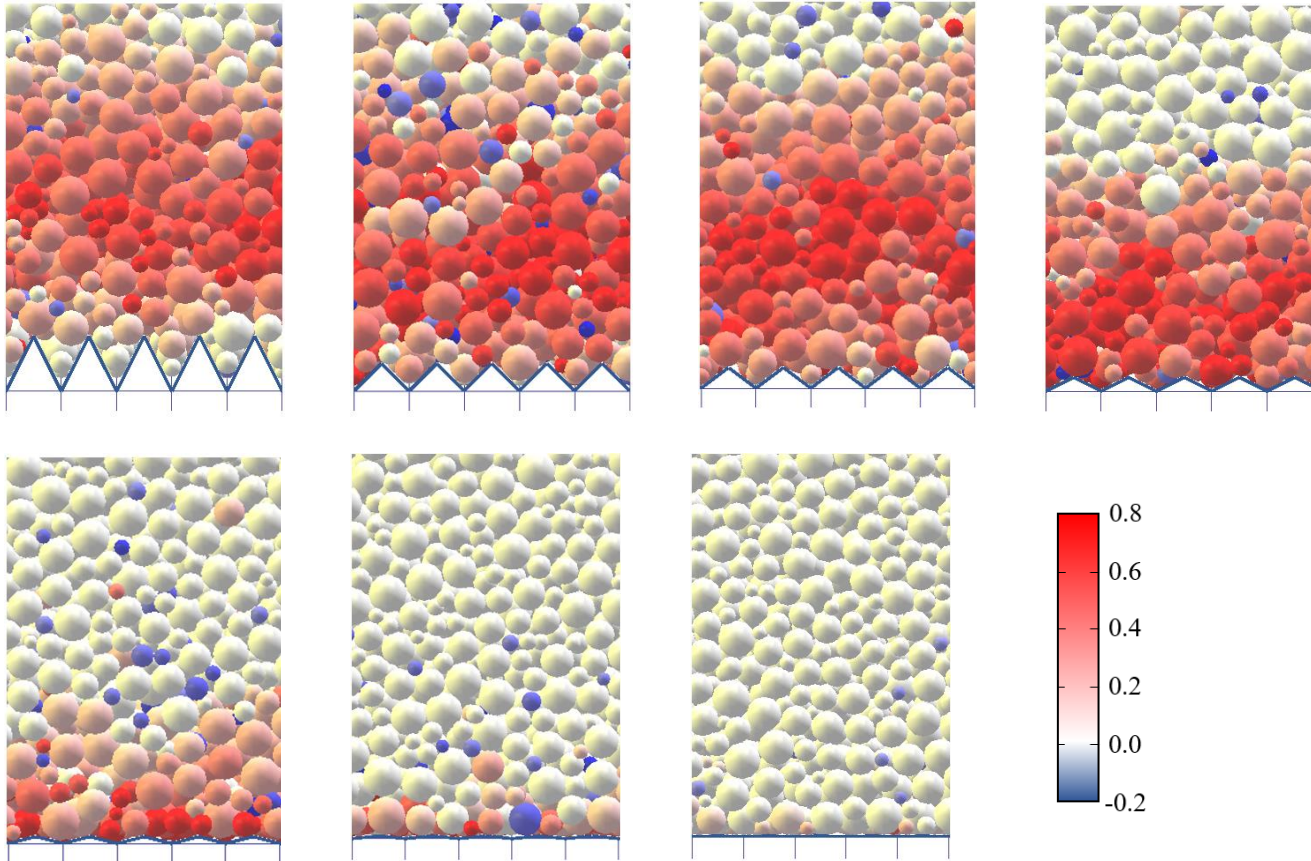


Fluktuacje przemieszczeń



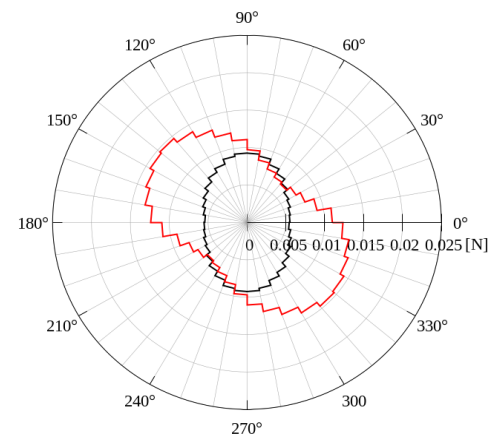
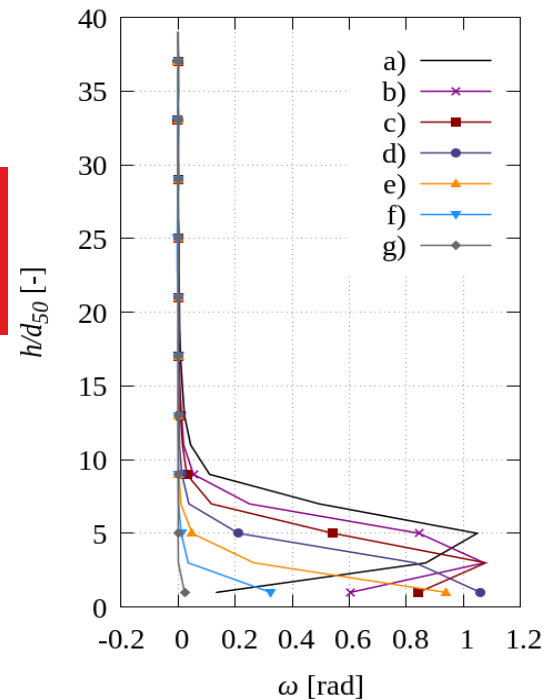
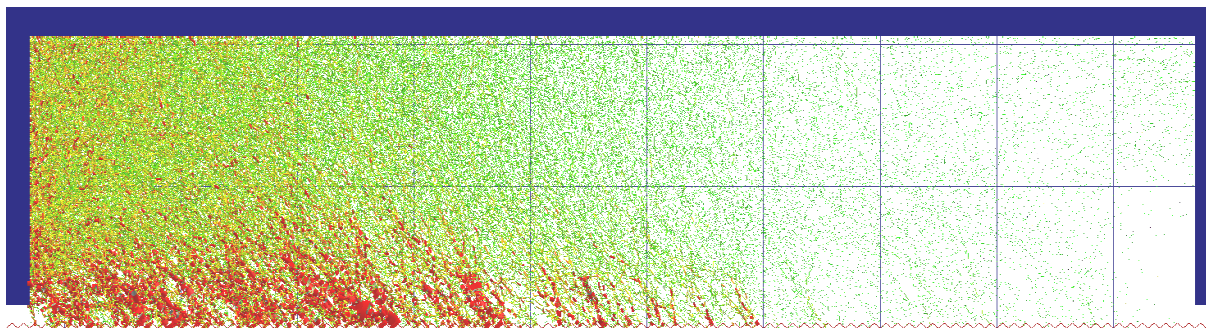
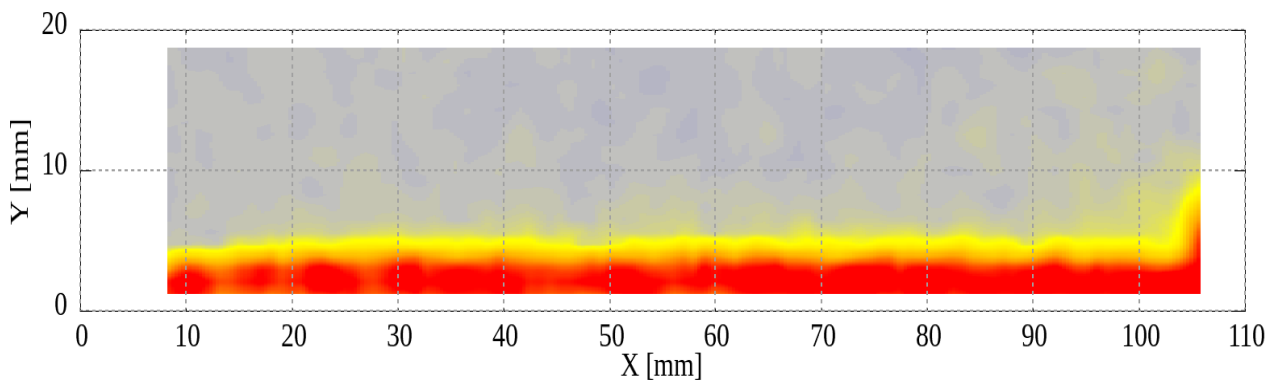


## Test ścinania z interfejsem (obroty)



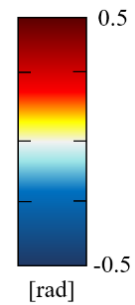
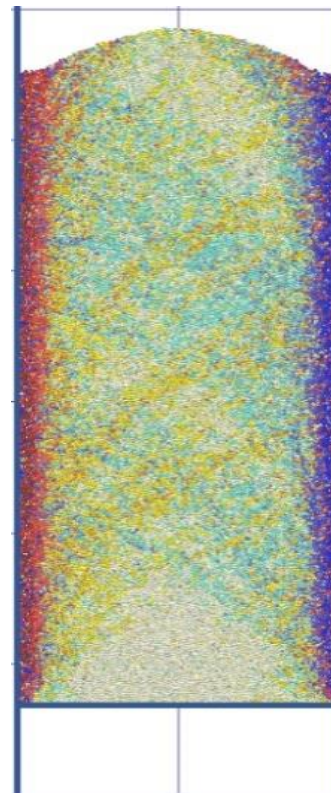
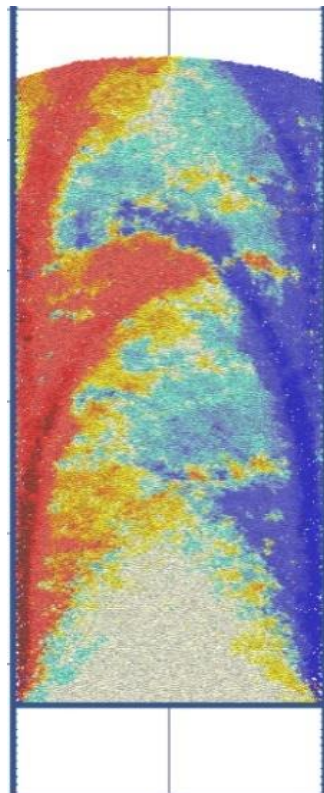


## Test ścinania z interfejsem (obroty, siły)





## Silos – wpływ kontrolowany (obroty)



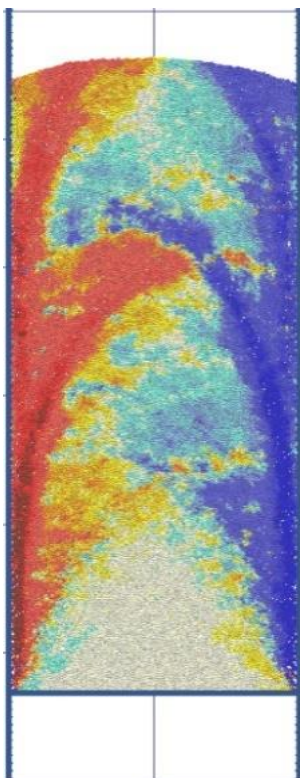




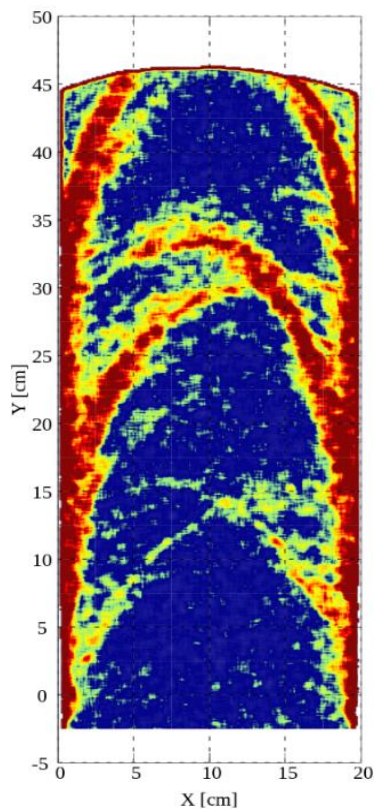
## Silos – wpływ kontrolowany

Kąt tarcia: eksperyment vs DEM

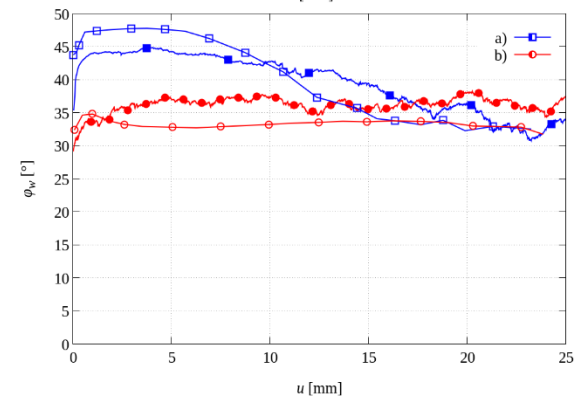
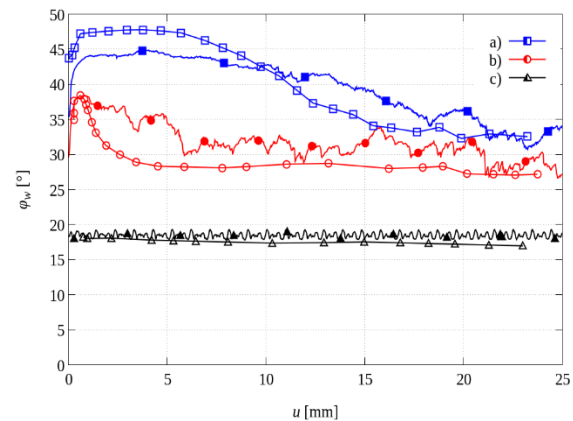
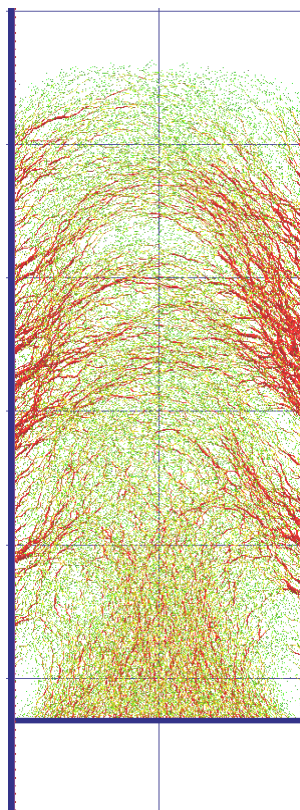
obroty



porowatość

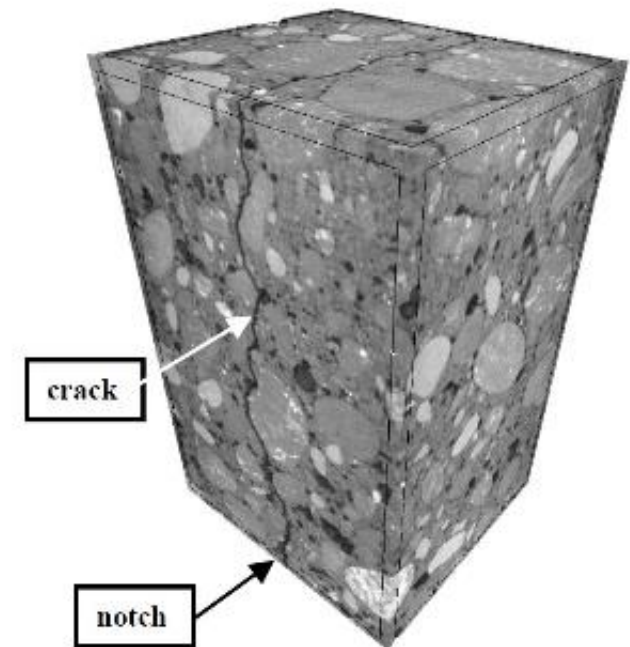
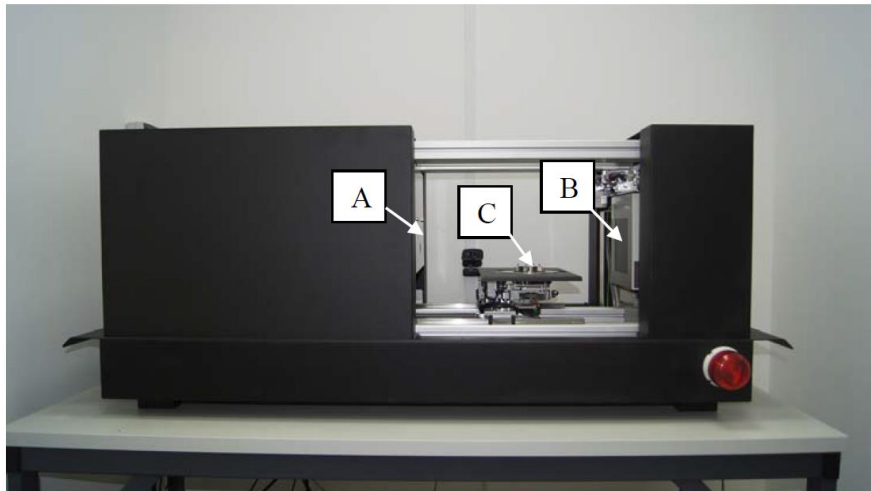


siły



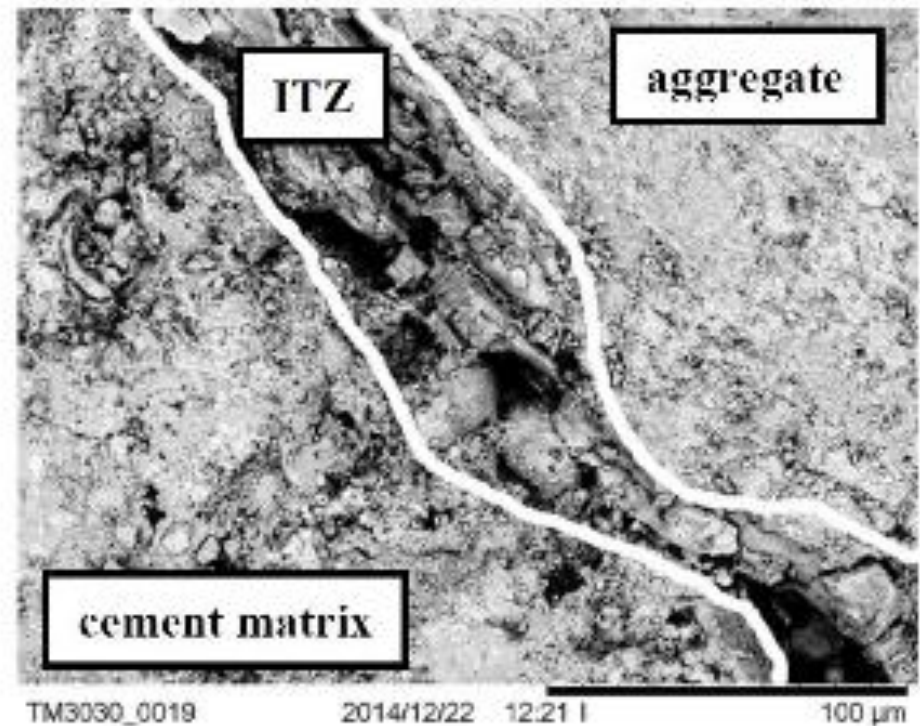
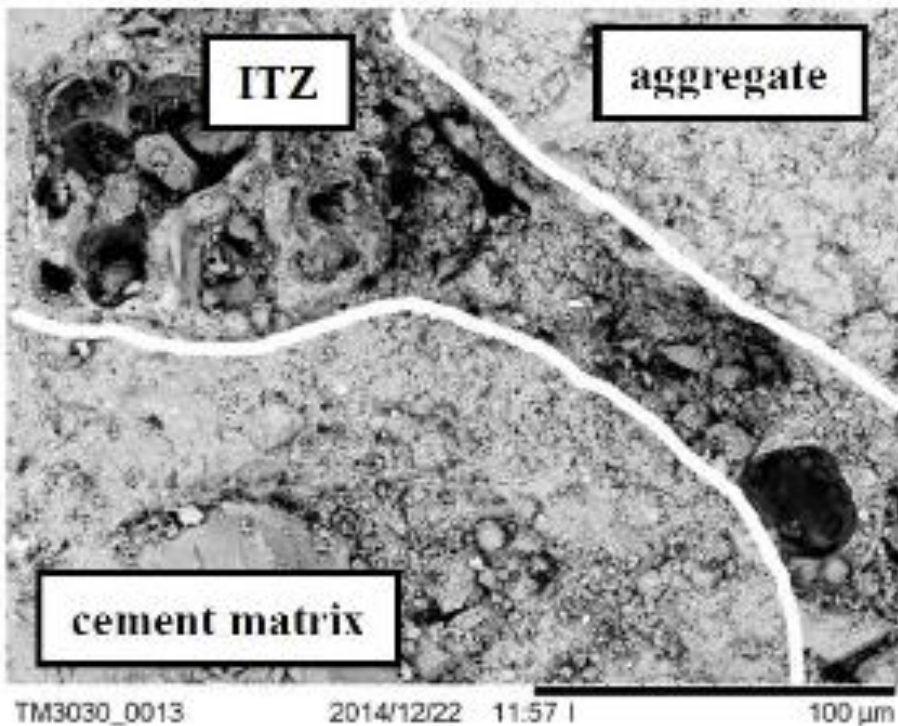


## Opis mikrostruktury – zdjęcia z mikrotomografu



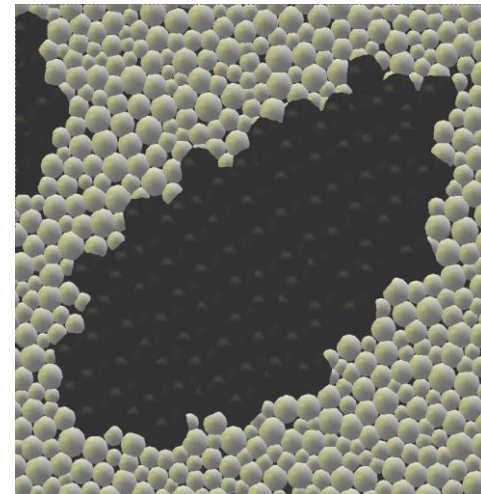
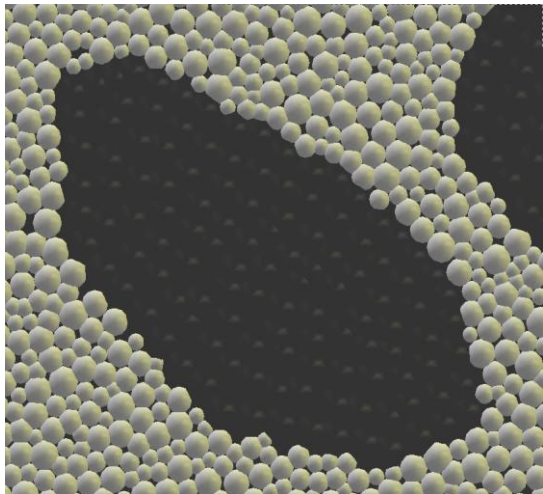
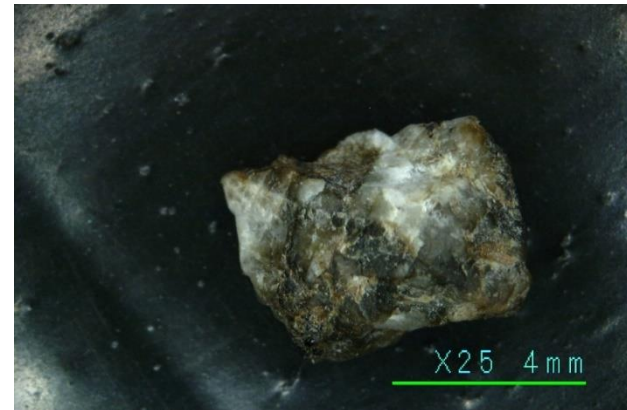


## Opis mikrostruktury – zdjęcia z mikroskopu



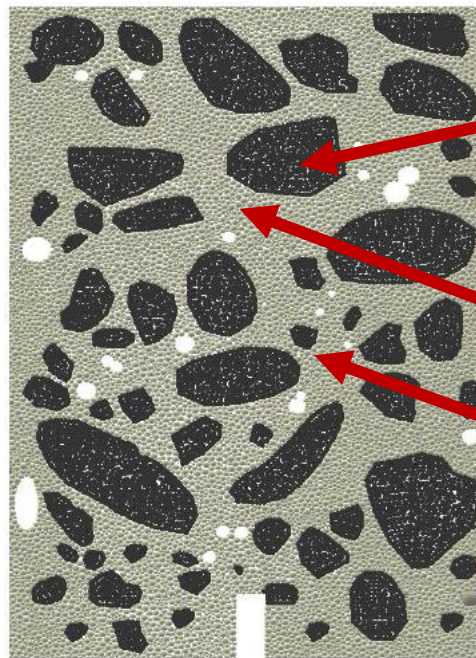
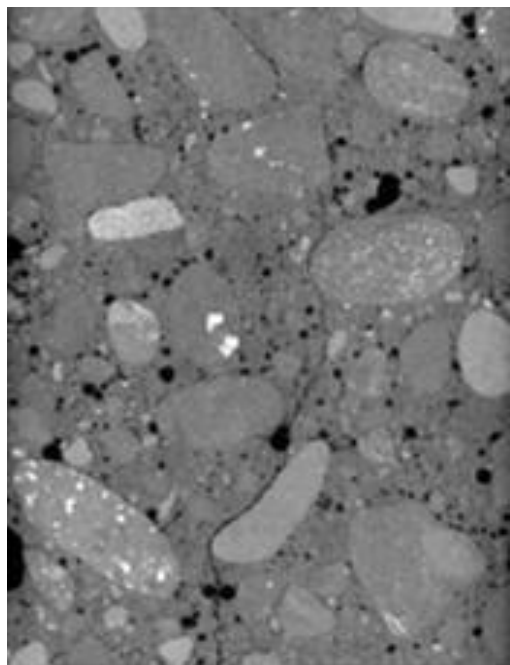


## Opis mikrostruktury – zdjęcia z mikroskopu





Opis mikrostruktury:



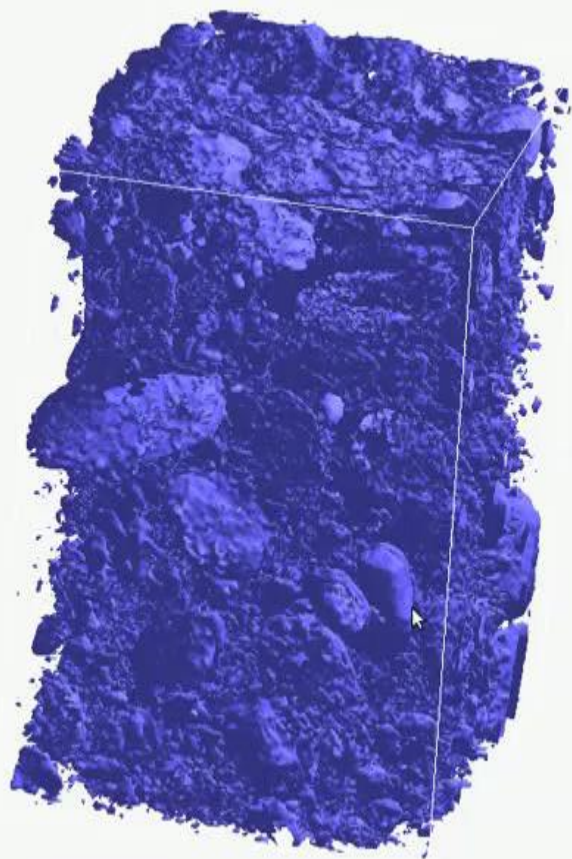
Kruszywo (grona)  
z ITZ na około  
kształt i pozycja ze  
zdjęcia

cement (kulki)

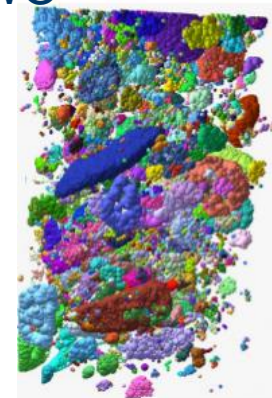
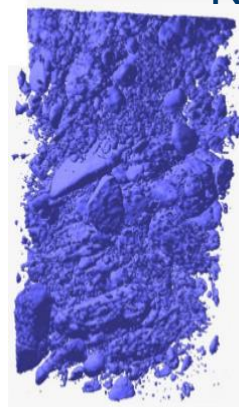
pory powietrza



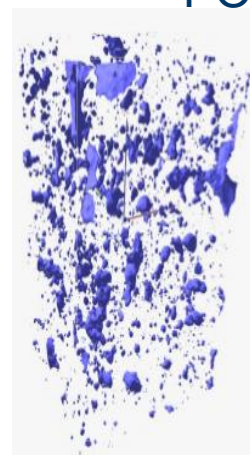
## Opis mikrostruktury - 3D



KRUSZYWO



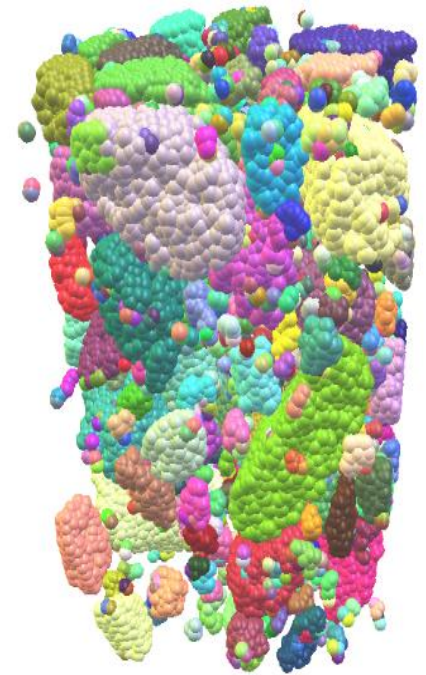
PORY POWIETRZA





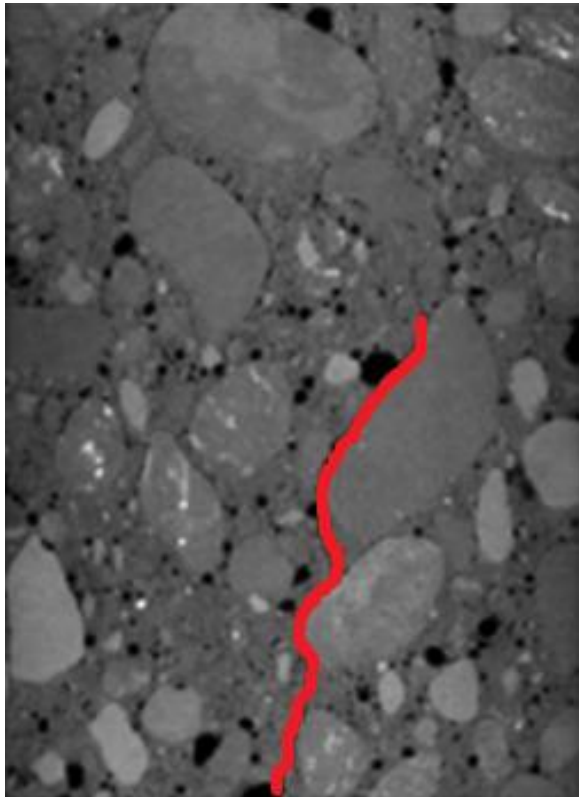
## Wyniki: Zginanie 3-punktowe belki

Stałe materiałowe		cement	ITZ
Moduł sztywności kontaktu	$E_c$ [GPa]	11.2	7.8
Stosunek sztywności	$\nu_c$ [-]	0.2	0.2
Kąt tarcia wewnętrzznego	$\mu$ [°]	18	18
Kohezja	C [MPa]	140	100
Minimalne naprężenia rozciągające	T [MPa]	22.5	15

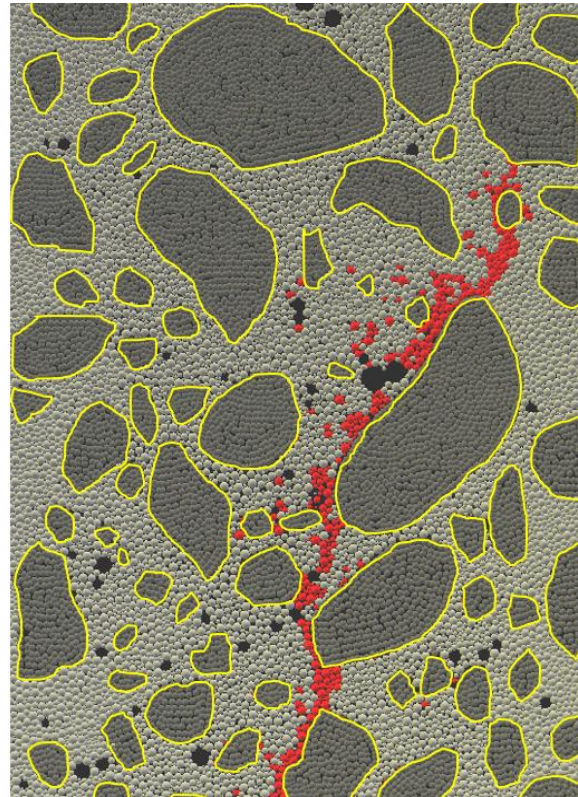




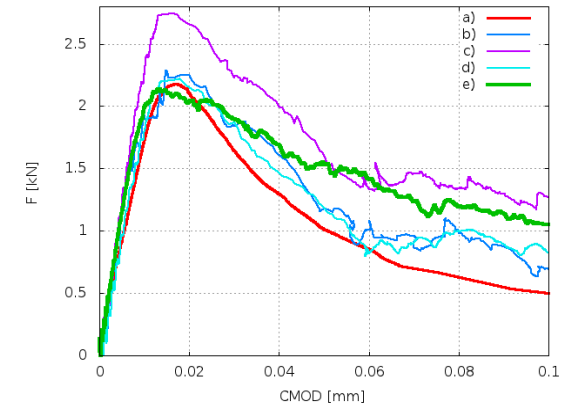
## Wyniki: Zginanie 3-punktowe belki



Laboratorium



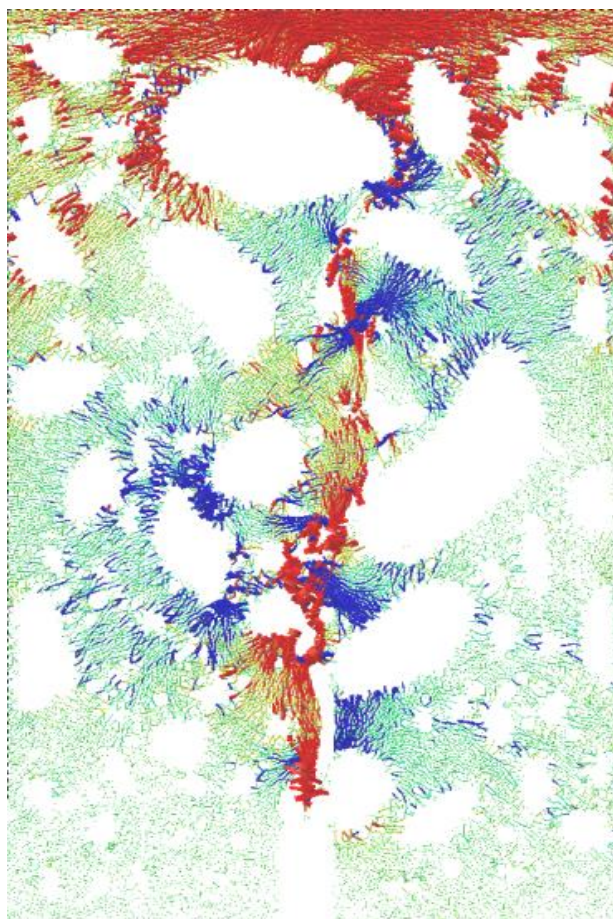
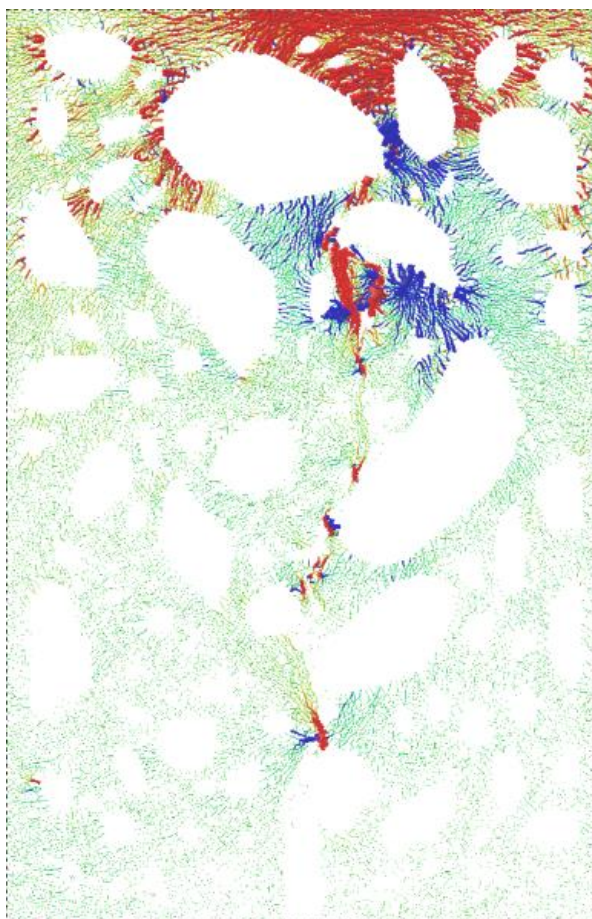
Obliczenia







## Wyniki: siły wewnętrzne

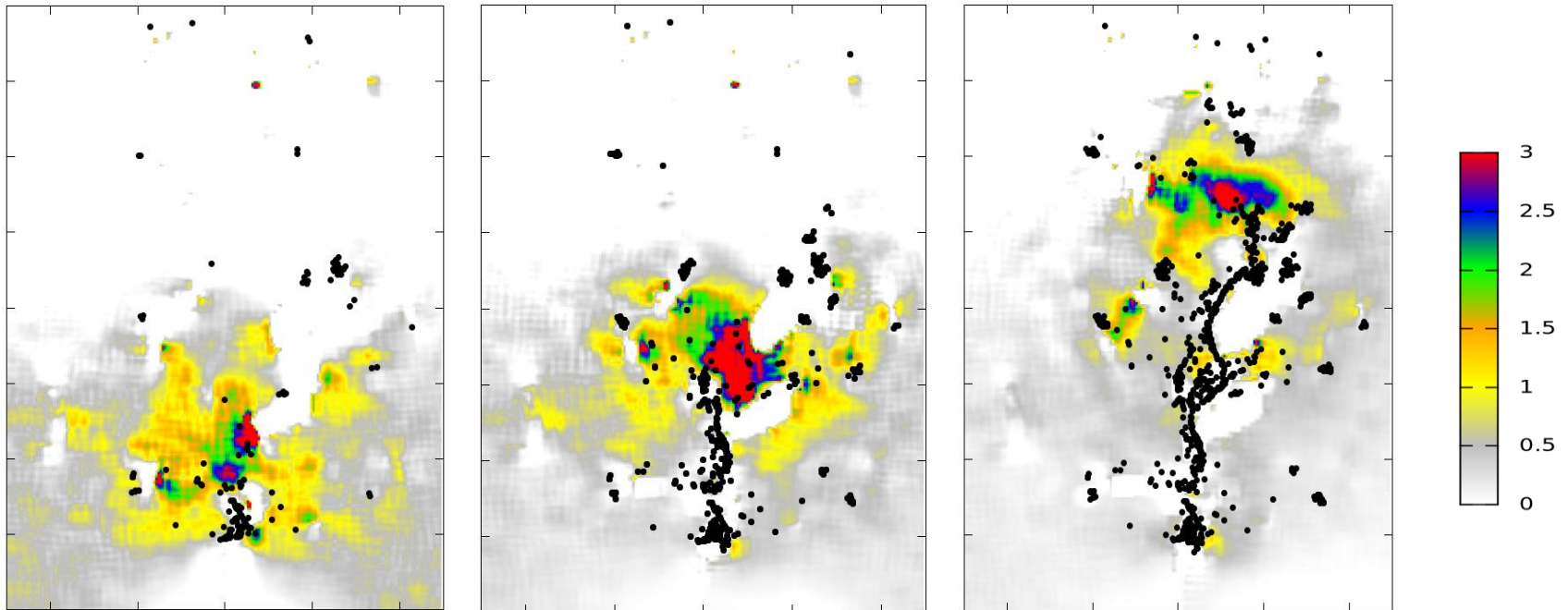


Czerwony kolor  
– siły ściskające

Niebieski kolor –  
siły rozciągające

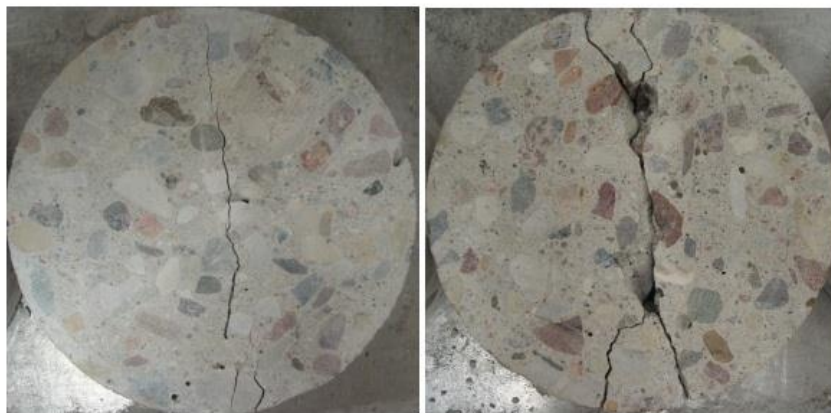


Wyniki: ewolucja naprężeń w belce 3-punktowo zginanej

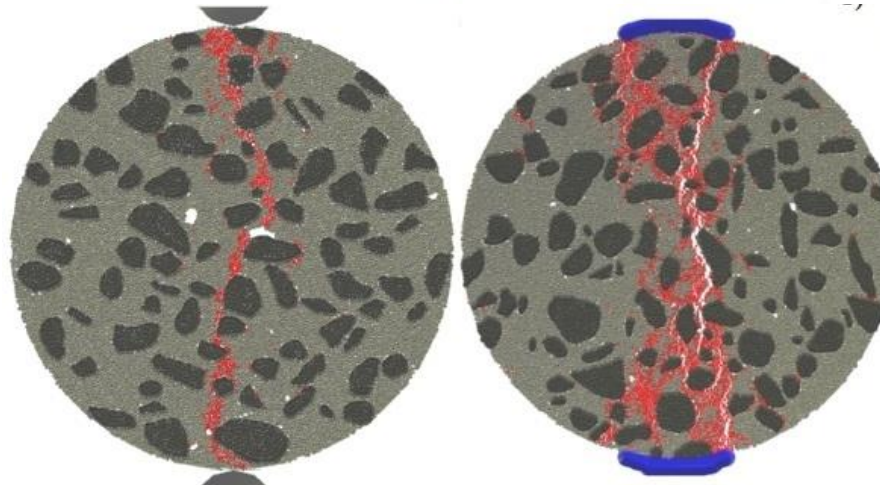




Rozłupywanie:



laboratorium

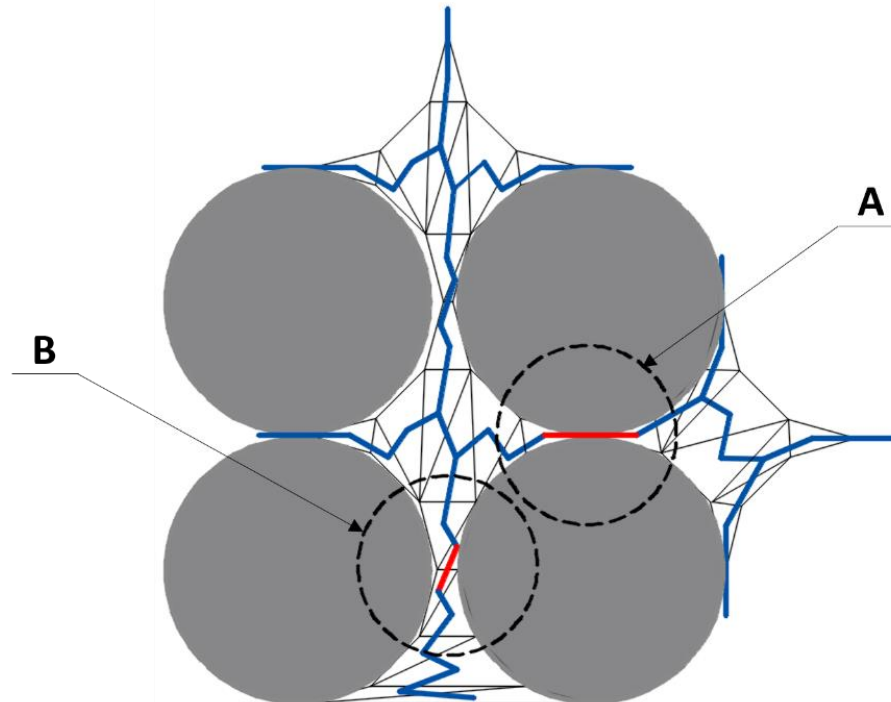


obliczenia



## Hydroszczelinowanie:

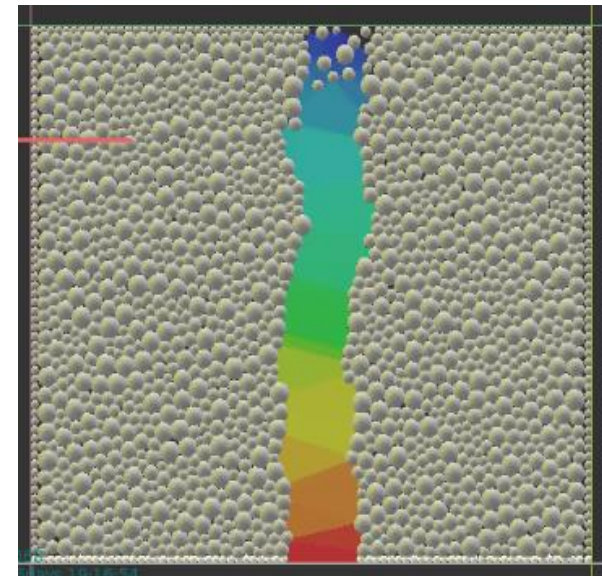
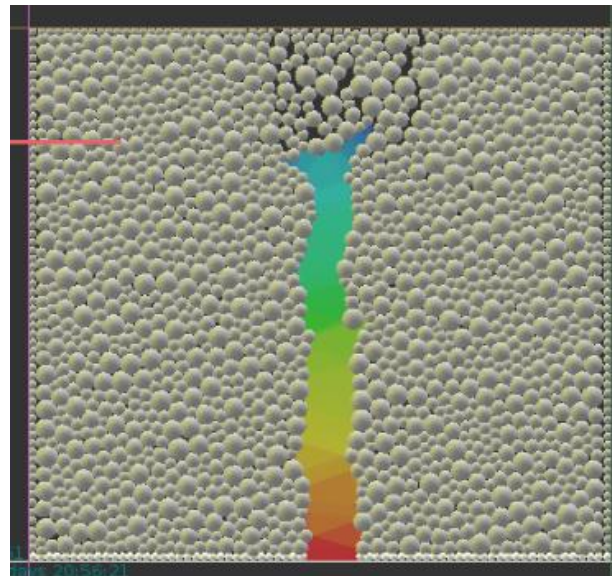
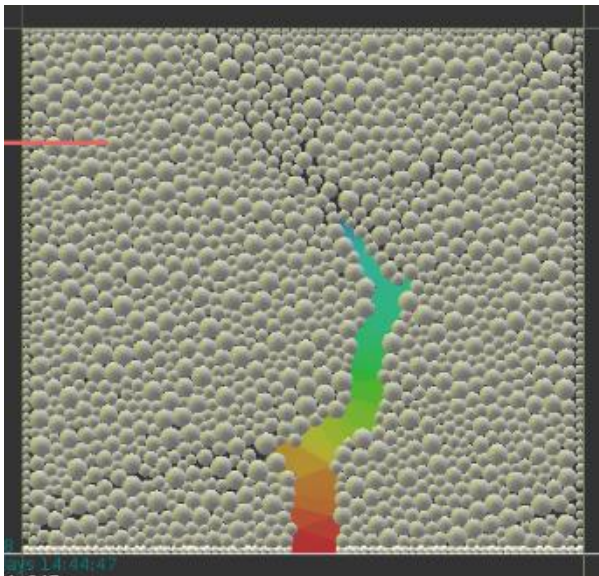
Siatka delaneya pomiędzy kulami (zmienna w czasie!)  
Przepływ cieczy i gazu w kanałach





## Hydroszczelinowanie: przykłady (rozkład ciśnień)

Kohezja





- **Metoda DEM nadaje się do opisu materiałów sypkich**
- **Bardzo dobrze nadaje się do obliczeń dużych deformacji lub/i zarysowań, pęknięć, defragmentacji**
- **Proste założenia matematyczne i prosty opis materiału (fizyczne parametry)**
- **Za jej pomocą można opisywać i badać mikrostrukturę materiałów**
- **Dostajemy bardzo dużo informacji z poziomu kruszywa**
- **Dzięki rozwojowi siły obliczeniowej coraz bardziej złożone zagadnienia mogą być symulowane (również skomplikowane kształty)**



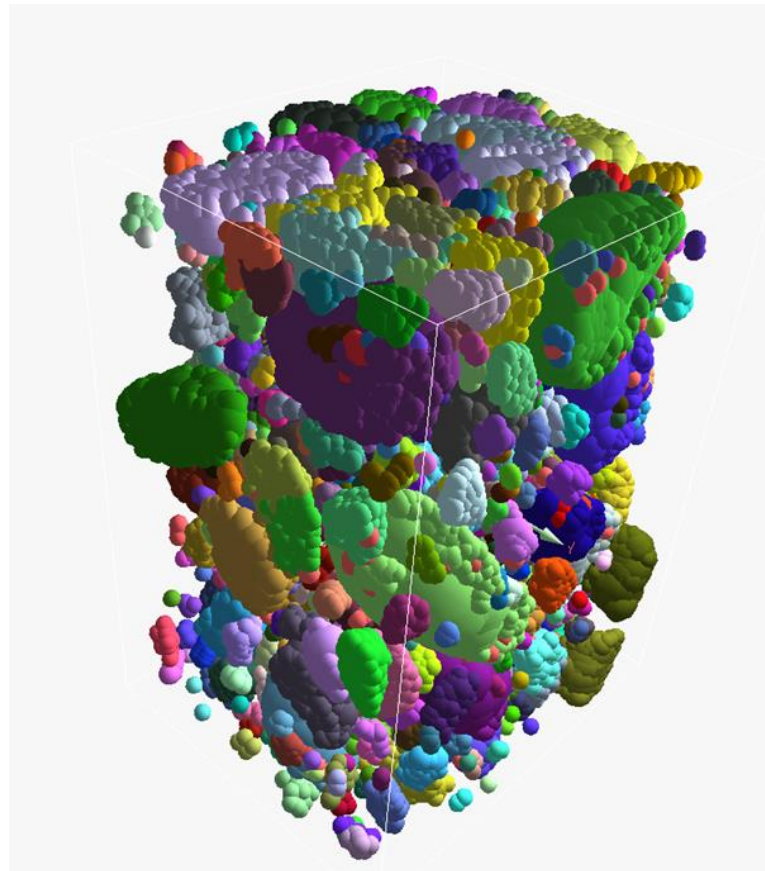
**Wciąż, niestety, nie nadaje się do prawdziwych problemów inżynierskich**

**Słabo nadaje się do materiałów ciągłych np. stali (choć jest możliwe ich obliczanie)**

**Jako metoda jawna zawsze znajduje rozwiązanie – trzeba uważać na krok czasowy**

Dziękuję za uwagę!

I zapraszam do dyskusji.







---

**HISTORIA MĄDROŚCIĄ  
PRZYSZŁOŚĆ WYZWANIEM**



## Algorytm

